Εξέταση Ιανουαρίου 2021 - Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μία είναι η σωστή απάντηση και αυτή πρέπει να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Ο χρόνος που τέθηκε στην κάθε ερώτηση είναι 9 λεπτά με 1 λεπτό διάλειμμα μεταξύ δυό διαδοχικών ερωτήσεων. Η επιλογή δεν απαντώ υπάρχει για να μην έχετε αρνητική βαθμολόγηση σε περίπτωση λάθους. Τις επόμενες μέρες ακολούθησε προφορική εξέταση στους επιτυχόντες.

Ερώτηση 1. Έστω $I = \log\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)$ και $J = (1+i)^i$. Τότε, επιλέξτε τη σωστή επιλογή

(i) $I = \ln(\pi/4) + i\pi/4$ και $J = e^{i\ln(\sqrt{2})-\pi/4}$.

(ii) $I = \ln(\pi/4) + i\pi/4$ και $J = e^{i\ln(\sqrt{2})+\pi/4}$.

(iii) $I = \ln(\pi/4) + i\pi/2$ και $J = e^{i\ln(\sqrt{2})-\pi/4}$.

(iv) $I = \ln(\pi/4) + i\pi/2$ και $J = e^{i\ln(\sqrt{2})+\pi/4}$.

(v) Κανένα από τα παραπάνω.

(vi) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 2. Δίνονται τα όρια

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-i)n + i\sqrt{n} + 1}{(2+i)n + (1+i)\sqrt[3]{n} + 5}$$

και

$$J = \lim_{z\to z_0} \exp\left(\frac{1}{2-|z|}\right)$$

με $z_0 \in \partial D(0,2)$. Τότε, στο επεκτεταμένο σώμα των μιγαδικών αριθμών,

(i) το J υπάρχει ενώ το I δεν υπάρχει.

(ii) το I υπάρχει ενώ το J δεν υπάρχει.

(iii) τα I, J δεν υπάρχουν.

(iv) τα I, J υπάρχουν.

(v) δεν απαντώ.

Ερώτηση 3. Η συνάρτηση $f(z) = |z|(Argz)^2$ είναι συνεχής ή μπορεί να επεκταθεί συνεχώς

(i) μόνο στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(ii) μόνο στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$.

(iii) σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$

(iv) σε κάποιο άλλο από τα παραπάνω σύνολα.

(v) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 4. Έστω οι δύο ακόλουθοι ισχυρισμοί.

(A) δεν υπάρχει συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι ακέραια.

(B) δεν υπάρχει πολυώνυμο βαθμού 2 των z και $\bar{z}$, το οποίο να είναι ακέραια συνάρτηση.

Τότε,

(i) Οι ισχυρισμοί A, B είναι αληθείς.

(ii) Οι ισχυρισμοί A, B είναι ψευδείς.

(iii) Ο ισχυρισμός A είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός B είναι ψευδής.

(iv) Ο ισχυρισμός B είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός A είναι ψευδής.

(v) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 5. Έστω $S = \partial D(2i, 1)$ απλή κλειστή καμπύλη. Τότε, $\displaystyle\int_S (z-2)^2 \log(z-2)dz = 2\pi i.$

(i) Σωστό.

(ii) Λάθος.

(iii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 6. Έστω $S = \partial D(0, 1)$ απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη. Τότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial D(0,1)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} = 0, \ z \in D(0, 1).$$

(i) Σωστό.

(ii) Λάθος.

(iii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 7. Έστω μια ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ και δύο ισχυρισμοί:

(A) Αν $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{2|z_n|} < 1$, τότε η $\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

(B) Αν $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{2|z_n|} > 2$, τότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

Τότε,

(i) Οι ισχυρισμοί A, B είναι αληθείς.

(ii) Οι ισχυρισμοί A, B είναι ψευδείς.

(iii) Ο ισχυρισμός A είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός B είναι ψευδής.

(iv) Ο ισχυρισμός B είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός A είναι ψευδής.

(v) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 8. Έστω οι δύο ακόλουθοι ισχυρισμοί.

(A) Το $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ είναι αστερόμορφο, αρκεί να ισχύει $z_0 \neq 0$.

(B) Το σύνολο

$$\Gamma = \{z = x + iy : (y < \frac{1}{x} \ \wedge \ x > 0) \ \vee \ (y > \frac{1}{x} \ \wedge \ x < 0) \ \vee \ x = 0\}$$

είναι αστερόμορφο.

Τότε,

(i) Οι ισχυρισμοί A, B είναι αληθείς.

(ii) Οι ισχυρισμοί A, B είναι ψευδείς.

(iii) Ο ισχυρισμός A είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός B είναι ψευδής.

(iv) Ο ισχυρισμός B είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός A είναι ψευδής.

(v) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 9. Έστω $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z) = 3, z \in \partial D(0,1)$. Τότε, η f μπορεί να επεκταθεί σε ακέραια συνάρτηση.

(i) Σωστό.

(ii) Λάθος.

(iii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 10. Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)}$, έχει στο $\mathbb{C}$

(i) μόνο ουσιώδεις ανωμαλίες.

(ii) μόνο πόλους.

(iii) μόνο επουσιώδεις ανωμαλίες.

(iv) κανένα από τα παραπάνω

(v) Δεν απαντώ